2 Vektor tangente

Neka je kriva L u prostoru zadana parametarski na sljedeći način

$$L : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I; \\ z = z(t) \end{cases}$$

(u skalarnom obliku) i neka tačka $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pripada krivoj L. Ako je tačka M_0 dobijena za vrijednost $t = t_0$ vektor tantgente u tački M_0 se računa po formuli $\vec{t} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.

Jednačina tangente na krivu L u tački $M_0(x_0, y_0, z_0)$ glasi

$$t : \frac{x - x_0}{t_1} = \frac{y - y_0}{t_2} = \frac{z - z_0}{t_3}$$

gdje je $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3) \neq \vec{\mathbf{0}}$ vektor tangente u tački M_0.

14. Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $z = 4a \sin \frac{t}{2}$ u tački $M_0(t = \frac{\pi}{2})$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa z-osom.

[$\frac{x - a(\frac{\pi}{2} - 1)}{1} = \frac{y - a}{1} = \frac{z - 2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; $\frac{\pi}{4}$ rad]

15. Odrediti jednačinu tangente krive L: $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t$ u tački $M_0(t = 1)$. Odrediti ugao koji dobijena tangenta zaklapa sa x-osom. [$\frac{x - e}{e} = \frac{y - e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{z - 1}{2}$; $\arccos \frac{e}{\sqrt{e^2 + e^{-2} + 4}}$]

16. Naći ugao između tangente na krivu

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \\ z &= bt \end{aligned}$$

i vektora $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak sa tačkom dodira. [$\measuredangle(\vec{t}, \vec{r}) = \arccos \frac{b^2 t}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}$]

17. U kojim tačkama krive $L : x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ je tangenta krive paralelna ravni $3x + y + z + 2 = 0$? [$M_1(-2, 3, -4)$; $M_2(-2, 12, 14)$]

Ako je u trodimenzionalnom euklidskom prostoru kriva zadata jednačinom

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

tada se vektor tangente određuje formulom

$$\vec{t} = \dot{\vec{r}}$$

18. Data je kriva $\vec{r} = \left\{\cos^2 t, \frac{\sin 2t}{2}, \sin t\right\}$. Pokazati da je ugao između tangente i vektora položaja dodirne tačke prav. [$\vec{r} \cdot \vec{t} = 0$]

19. Data je kriva $\vec{r} = a \cos t\, \vec{i} + a \sin t\, \vec{j} + az(t)\vec{k}$. Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a, 0, a)$ i da njene tangente prodiru ravan $x0y$ u tačkama kružnice $x^2 + y^2 = R^2$.

[$z = ae^{ut}$ gdje je $u = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2 - a^2}}$]

20. Dokazati da kriva

$$x = e^t \cos t$$
$$y = e^t \sin t$$
$$z = e^t$$

siječe izvodnicu konusa na kojem kriva leži pod konstantnim uglom.

$[\vec{t} \cdot \vec{r} = 2e^{2t};\ \measuredangle(\vec{t}, \vec{r}) = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}]$

21. Vektor tangente $\vec{t} = \frac{1}{2t^2+9}(9, 6t, 2t^2)$ zaklapa isti ugao sa konstantnim pravcem $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ (gdje su $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$, $|\vec{p}| = 1$) bez obzira na vrijednost t. Odrediti pravac $\vec{p}$.

$[\vec{p}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}});\ \vec{p}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})]$

> Ako je kriva L data u implicitnom obliku
>
> $$L : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$
>
> tada je najlakši način da odredimo vektor tangente je da prvo parametrizujemo krivu. Međutim, ako smo u nemogućnosti parametrizirati krivu, vektor tangente se može izračunati na sljedeći način
>
> $$\vec{t} = \left(\begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1z} & F'_{1x} \\ F'_{2z} & F'_{2x} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right)$$
>
> (gdje su svi parcijalni izvodi izračunati u tački M_0).

22. Dokazati da tangente na krivu $C : \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$ obrazuju konstantan ugao sa pravcem koji ima vektor pravca $\vec{a} = (1, 0, 1)$.

$[\measuredangle(\vec{t}, \vec{a}) = \frac{\pi}{4}]$

23. Pokazati da tangente krive

$$C : \begin{cases} x^2 = 3y \\ 2xy = 9z \end{cases}$$

obrazuju stalan ugao sa jednim konstantnim pravcem. Naći taj pravac i taj ugao.

$[1^\circ\ \vec{p}_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ \frac{\pi}{4}$ rad; $2^\circ\ \vec{p}_0 = (\frac{1}{-\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \frac{3\pi}{4}$ rad$]$

24. Kriva koja se naziva loksodroma određena je jednačinom $\phi = a \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$, čiji je prvi izvod po teti $\frac{-a}{\cos\theta}$, gdje je θ geografska širina a ϕ dužina tačke na sferi. Dokazati da ona siječe merdijane sfere pod uglom α tako da je $\operatorname{tg}\alpha = a$. [koncentrični krugovi - geogr. širina]